Πχ

72, 69, 82, 75, 103, 121, 114, 100, 85, 99 (Δείκτης νοημοσύνης 10 παιδιών)

$n=10$ με $N(\mu, \sigma^2=49)$

Λύση

$H_0: \mu=88 (=\mu_0)$ με εναλλακτική: $H_a: \mu>88$ $(\alpha=0{,}05)$

$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \rightsquigarrow \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

θέλω $Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$ (όταν $\mu=\mu_0=88$)

$Z=\frac{\bar{x}-88}{\sigma/\sqrt{n}}$, κρ. περιοχή $Z>Z_\alpha=Z_{0,05}=1{,}645$

$Z=\frac{92-88}{7/\sqrt{10}}=1{,}81$ Επειδή $1{,}81>1{,}645$ απορρίπτω την μηδενική υπόθεση H_0

P-τιμή $=P(Z>1{,}81 \mid Z\sim N(0,1))=0{,}0351<0{,}05(=\alpha)$, απορρίπτω την H_0

Συμπερασματολογία για τη μέση τιμή (μ)

Πχ. (4.2)

170, 175, 190, 198, 215, 185, 184, 207, 210, 193, 196, 180

$n=12$, $N(\mu,\sigma^2)$ με σ: άγνωστο, $\alpha=0{,}01$

αριθμός βακτηριδίων ανά 1ε θάλασσες του επιπέδου μοσφελείας
(συνέχεια στην επόμενη σελίδα)

Γενικές

Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από πληθυσμό (μ,σ^2)

Ενδιαφέρει η παράμετρος μ.

Υπενθύμιση: $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις

1) Κανονικός Πληθυσμός, γνωστή διακύμανση: $N(\mu,\sigma^2)$ με σ: γνωστή

καλύτερος εκτιμητής του μ: $\hat{\mu}=\bar{X}_i$

τυπικό σφάλμα : $\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Καλύτερο $(1-\alpha)100\%$ ΔΕ για το μ: $L=\bar{X}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$U: \bar{X}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μέσης

(i) $H_0: \mu\leq\mu_0$ εναλλακτική $H_a: \mu>\mu_0$ (με μ_0 γνωστή)

(ii) $H_0: \mu\geq\mu_0$ —||— $H_a: \mu<\mu_0$

(iii) $H_0: \mu=\mu_0$ —||— $H_a: \mu\neq\mu_0$

με επίπεδο εναλλακτικότητας α χρησιμοποιούμε το στατιστικό

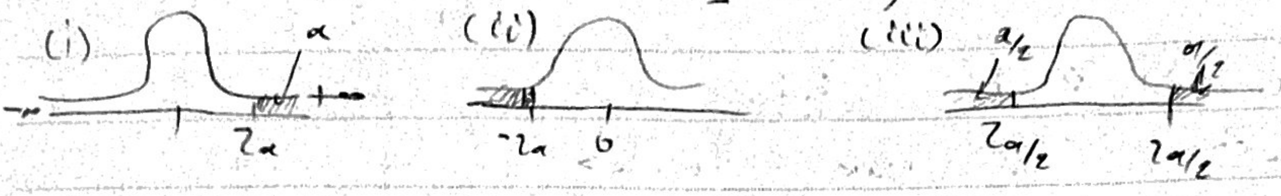
$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$

και κρίσιμες περιοχές

(i) $z \geq z_\alpha$ δηλ. $C=[z_\alpha, +\infty)$

(ii) $z \leq -z_\alpha$ δηλ. $C=(-\infty, -z_\alpha]$

(iii) $|z| \geq z_{\alpha/2}$ δηλ. $C=(-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, +\infty)$



2) Κανονικός Πληθυσμός, άγνωστη διακύμανση: $N(\mu, \sigma^2)$ με σ άγνωστο

$\hat{\sigma}^2 = S^2$

Καλύτερος εκτιμητής του μ: $\hat{\mu} = \bar{x}_i$,

Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα: $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

Καλύτερο $(1-\alpha)100\%$ Δ.Ε. για το μ: $L = \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$U = \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μέσης:

(i) $H_0: \mu \leq \mu_0$ εναλλακτική $H_a: \mu > \mu_0$ (με μ_0 γνωστό)

(ii) $H_0: \mu \geq \mu_0$ εναλλακτική $H_a: \mu < \mu_0$

(iii) $H_0: \mu = \mu_0$ εναλλακτική $H_a: \mu \neq \mu_0$

με επίπεδο εναλλακτικότητας α χρησιμοποιούμε το στατιστικό $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$

και κρίσιμες περιοχές t-τεστ.

~~(i) $z \geq z_\alpha$~~ (i) $t \geq t_{\alpha, n-1}$

~~(ii) $z \leq -z_\alpha$~~ (ii) $t \leq -t_{\alpha, n-1}$

~~(iii) $|z| \geq z_{\alpha/2}$~~ (iii) $|t| \geq t_{\alpha/2, n-1}$

Παρ 4.2

$\alpha = 0{,}01$, $H_0: \mu = 200$ με εναλλακτ. $H_a: \mu < 200$

$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 200}{S/\sqrt{n}}$, κρ. περ. $t < -t_{\alpha, n-1} (= -t_{0.01, 11} = -2{,}718)$

$\bar{x} = 191{,}9$, $S^2 = 196{,}841$, $S = 14{,}03$

$t = \frac{191{,}9 - 200.01}{14.03/\sqrt{12}} = -2.197$ επειδή $-2.197 > -2{,}718$ δεν απορρίπτουμε την H_0

άρα δεν κάναμε λάθος στις περιπτώσεις

και 95% Δ.Ε. για το μ: [182.99, 200.81]

$t_{0.01, 11} = 2.201$

3) Μη κανονικός πληθυσμός μ, σ^2 - μεγάλο δείγμα ($n \geq 25$)

Καλύτερος εκτιμητής του μ: $\hat{\mu} = \bar{x}$

Εκτιμώμενο τυπικό σφάλμα: $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

Καλύτερο $(1-a)100\%$ δ.ε. για το μ: $L = \bar{x} - z_{a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$U = \bar{x} + z_{a/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μορφής:

(i) $H_0: \mu \leq \mu_0$ εναλλακτική: $H_a: \mu > \mu_0$ (μ_0 γνωστό)

(ii) $H_0: \mu \geq \mu_0$ — || — $H_a: \mu < \mu_0$

(iii) $H_0: \mu = \mu_0$ — || — $H_a: \mu \neq \mu_0$

Σε επίπεδο σημαντικότητας a χρησιμοποιούμε το στατιστικό: $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\underset{\text{προσεγγ.}}{\sim}} N(0,1)$

και κρίσιμες περιοχές

(i) $Z \geq Z_a$

(ii) $Z \leq -Z_a$

(iii) $|Z| \geq Z_{a/2}$

Άσκηση 4.1

$X = (X_1, \dots, X_n) \sim N(\mu_x, \sigma^2)$

$Y = (Y_1, \dots, Y_n) \sim N(\mu_y, \sigma^2)$

Ν.δ.ο. $\forall \omega \in [0,1]$ η σ.σ. $U = U(X,Y) = \omega S_x^2 + (1-\omega) S_y^2$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του σ^2

Λύση

$E(S_x^2) = \sigma^2 \leadsto \hat{\sigma}^2 = S_x^2$ κ $E(S_y^2) = \sigma^2 \leadsto \hat{\sigma}^2 = S_y^2$

$E(U) = \omega E(S_x^2) + (1-\omega) E(S_y^2) = \omega\sigma^2 + (1-\omega)\sigma^2 = \sigma^2$

άρα $\hat{\sigma}^2 = U$ κ αμερόληπτος

$\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n_1-1} \Rightarrow Var\left(\frac{(n_1-1)S_x^2}{\sigma^2}\right) = 2(n_1-1) \Rightarrow Var S_x^2 = \frac{2\sigma^4}{n_1-1}$

$\frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim X_{n_2-1} \Rightarrow Var\left(\frac{(n_2-1)S_y^2}{\sigma^2}\right) = 2(n_2-1) \Rightarrow Var S_y^2 = \frac{2\sigma^4}{n_2-1}$

$\Rightarrow Var(U) = \omega^2 \cdot 2\frac{\sigma^4}{n_1-1} + (1-\omega)^2 2\frac{\sigma^4}{n_2-1}$.

Βρίσκω πού παρουσιάζει ελάχιστο $\longrightarrow \omega = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$

και το αντικαθιστώ στην συνάρτηση